한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

1. 함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 x에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a\ \geq\ \cos\alpha\ \geq\ \cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a\ \geq\ (b-x)\cos\alpha=\sin b-\sin x\ \geq\ (b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면, $\int_a^b(b-x)\cos b\,dx\ \leq\ \int_a^b(\sin b-\sin x)dx\ \leq\ \int_a^b(b-x)\cos a\,dx$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b\ \leq\ \int_a^b(\sin b-\sin x)dx\ \leq\ \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

2. $\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx\ =-e^{-x}\cos x-\left[-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\right]$

$$\therefore\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x).$$

① $\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}\ =(-1)^k\frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right)$

② $a_n=\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}\left|e^{-x}\cos x\right|dx=\begin{cases}\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{짝수}\\-\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{홀수}\end{cases}=\frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right)$

따라서 급수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}+\ \cdots\ +e^{-(n-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+2\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}(1-e^{-(n-1)\pi})}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right]=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}\ =\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{2}\,\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

3. $b_1=\frac{3}{2},\ b_k-b_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k}-\frac{b_k}{k+1}\right)=(b_1-\frac{b_1}{2})+(\frac{b_2}{2}-\frac{b_2}{3})+\cdots+(\frac{b_n}{n}-\frac{b_n}{n+1})\\&=b_1+\frac{1}{2}(b_2-b_1)+\frac{1}{3}(b_3-b_2)+\cdots+\frac{1}{n}(b_n-b_{n-1})-\frac{b_n}{n+1}\\&=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{b_n}{n+1}\\&=2-\frac{1}{n+1}-\frac{b_n}{n+1}\end{aligned}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\ \leq\ b_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\ \leq\ 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(n+1)$이 성립하므로,

각 변을 $n+1$로 나누고 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\ \leq\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}\ \leq\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=2$이다.