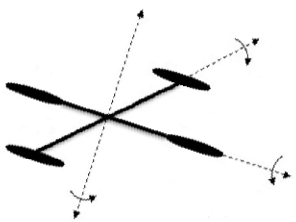
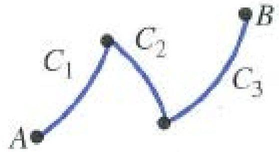
9장 벡터의 미적분 （6）



- 곡선

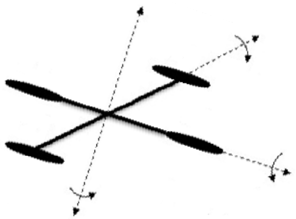
(*i*) f' 과 g' 이 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 동시에 0이 아닐 때 C는 **매끄러운 곡선**(smooth curve)이다.

(*v*) C가 폐곡선이 아닐 때 곡선 C의 **양의 방향**(positive direction)은 t 값이 증가하는 방향이다.

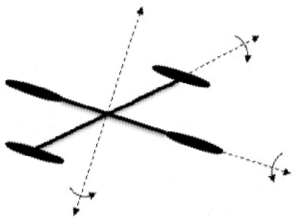


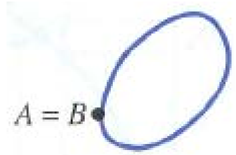
(ii) C가 끝과 끝이 연결된 유한 개의 매끄러운 곡선 $C_1, C_2, \ldots, C_n$으로 이루어져 있으면, 즉 $C=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$이면, C는 **조각별로 매끄러운 곡선**(piecewise smooth curve)이다.

(v) C가 폐곡선이 아닐 때 곡선 C의 **양의 방향**(positive direction)은 t 값이 증가하는 방향이다.



(*iii*) $A=B$ 이면 C는 **폐곡선**(closed curve)이다.





(*iii*) $A=B$ 이면 C는 **폐곡선**(closed curve)이다.

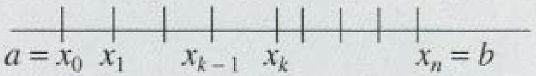
(*iv*) $A=B$ 이고 곡선이 교차하지 않으면 C는 **단순 폐곡선**(simple closed curve)이다.

- 정적분

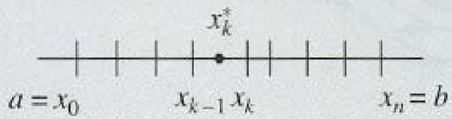
$y=f(x)$

1. f는 폐구간 $[a, b]$에서 정의된다.
2. 구간 $[a, b]$를 길이 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$인 n개의 부분구간 $[x_{k-1}, x_k]$로 분할한다. 이를 분할 P라고 한다.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$



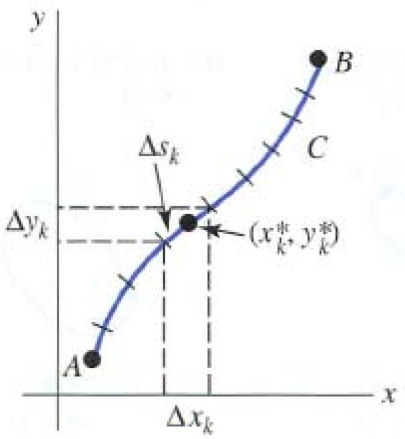
3. $\|P\|$는 가장 긴 부분구간의 길이이다. $\|P\|$를 분할 P의 놈(norm)이라 한다.
4. 각 부분구간 안에서 x_k^*를 선택한다.



5. 합 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ 를 구성한다.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k}$$

- 선적분

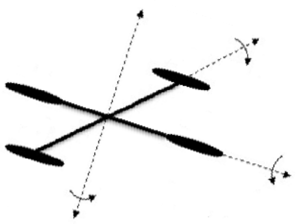


$z=G(x, y)$

1. G는 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a \le t \le b$로 정의되는 매끄러운 곡선 C를 포함하는 영역에서 정의된다.
2. C를 $[a, b]$의 분할 $a=t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n=b$에 따라 길이 Δs_k인 n개의 부분호(subarc)로 분할한다. 부분호의 x축, y축에 대한 정사영의 길이는 각각 Δx_k, Δy_k이다.
3. $\|P\|$는 분할의 놈(norm)으로 가장 긴 부분호의 길이이다.
4. 각 부분호 위에서 (x_k^*, y_k^*)를 선택한다.
5. 합

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k$$

를 구성한다.



정의 9.9 평면에서의 선적분

G가 매끄러운 곡선 C를 포함하는 평면 영역에서 정의되는 x와 y의 함수일 때

(*i*) A에서 B까지 C를 따르는 x에 대한 G의 선적분은

$$\int_C G(x, y)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta x_k$$

(*ii*) A에서 B까지 C를 따르는 y에 대한 G의 선적분은

$$\int_C G(x, y)\, dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta y_k$$

(*iii*) A에서 B까지 C를 따르는 호의 길이 s에 대한 G의 선적분은

$$\int_C G(x, y)\, ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k$$

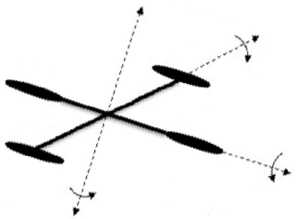
이다.

- 매개변수로 정의되는 선적분

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G(f(t), g(t))\, f'(t)\, dt$$

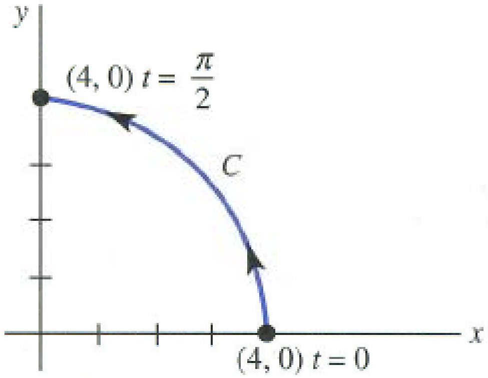
$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G(f(t), g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G(f(t), g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$



예제 1 선적분의 계산

곡선 C가 $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$로 정의되는 4분원일 때 (a) $\int_C xy^2\,dx$, (b) $\int_C xy^2 dy$, (c) $\int_C xy^2\,ds$를 계산하라. 그림 9.47을 보라.

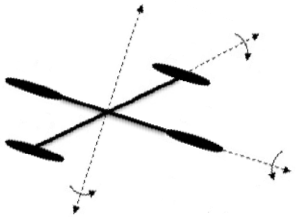


풀이 (a) (1)에서

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\sin^2 t)}^{y^2}\overbrace{(-4\sin t\,dt)}^{dx}$$

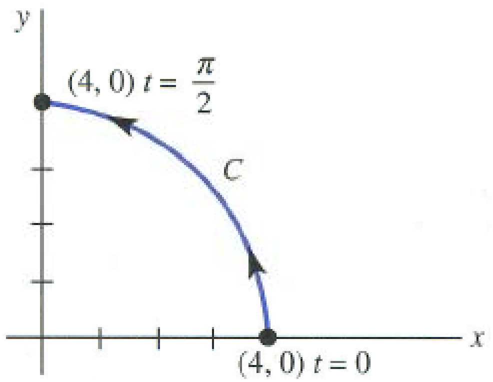
$$= -256\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\cos t\,dt$$

$$= -256\left[\frac{1}{4}\sin^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64$$



예제 1 선적분의 계산

곡선 C가 $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$로 정의되는 4분원일 때 (a) $\int_C xy^2\,dx$, (b) $\int_C xy^2\,dy$, (c) $\int_C xy^2\,ds$를 계산하라. 그림 9.47을 보라.



(b) (2)에서

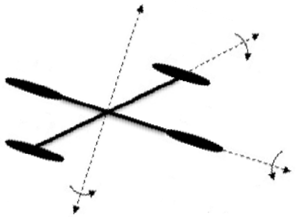
$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\sin^2 t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt \quad \leftarrow \text{삼각함수 공식}$$

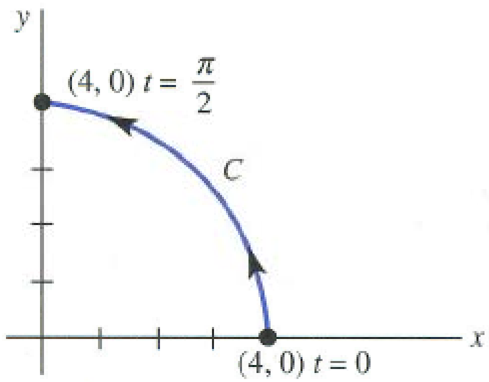
$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt$$

$$= 32\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi$$



예제 1 선적분의 계산

곡선 C가 $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$로 정의되는 4분원일 때 (a) $\int_C xy^2\,dx$, (b) $\int_C xy^2\,dy$, (c) $\int_C xy^2\,ds$를 계산하라. 그림 9.47을 보라.

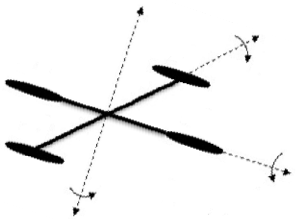


(c) (3)에서

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\sin^2 t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt}^{ds}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos t\,dt$$

$$= 256\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}$$



- 양함수로 정의되는 선적분

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G(x, f(x))\, dx$$

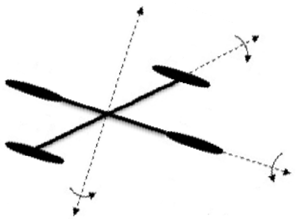
$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G(x, f(x)) f'(x)\, dx$$

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy$$

$$\longrightarrow \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad \text{또는 단순히} \quad \int_C P\, dx + Q\, dy$$

$$\longrightarrow \oint_C P\, dx + Q\, dy$$

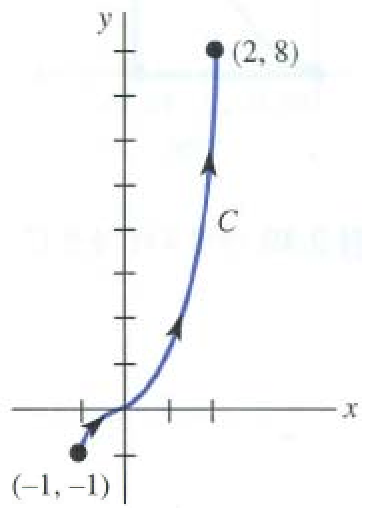


예제 2 **양함수로 정의되는 곡선**

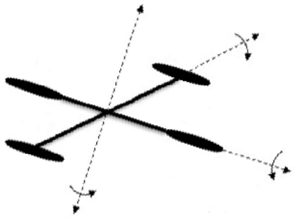
C가 $y=x^3$, $-1 \le x \le 2$일 때 $\int_C xydx+x^2\,dy$를 계산하라.

풀이 곡선 C는 그림 9.48과 같고 양함수 $y=x^3$에 의하여 정의되므로 x를 매개변수로 사용한다. $dy=3x^2dx$이므로

$$\begin{aligned}\int_C xy\,dx + x^2\,dy &= \int_{-1}^{2} x\overbrace{(x^3)}^{y}dx + x^2\overbrace{(3x^2\,dx)}^{dy}\\ &= \int_{-1}^{2} 4x^4\,dx\\ &= \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{132}{5}\end{aligned}$$



이다.



예제 3 매개변수로 정의되는 곡선

C가 원 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$일 때 $\oint_C x\,dx$ 를 계산하라.

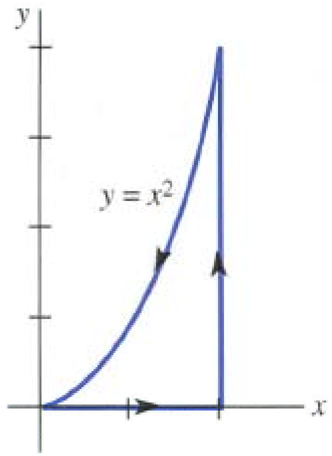
풀이 (1)에서

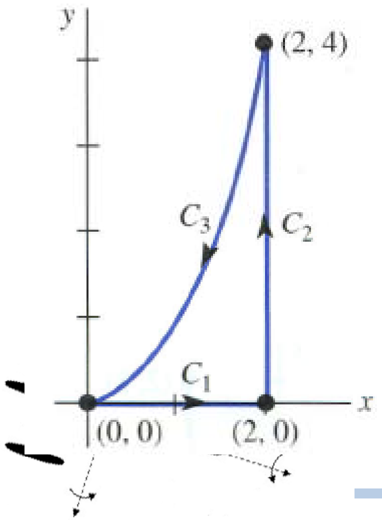
$$\oint_C x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos t(-\sin t\,dt) = \frac{1}{2}\cos^2 t\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1-1] = 0$$

이다.

예제 4 폐곡선

폐곡선 C가 그림 9.49(a)와 같이 주어졌을 때 $\oint_C y^2\,dx - x^2\,dy$ 를 계산하라.





$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0$$

$$\int_{C_2} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy$$

$$= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16$$

$$\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx)$$

$$= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_2^0 = \frac{8}{5}$$

$$\boxed{\oint_C y^2 dx - x^2\,dy = 0 - 16 + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}}$$

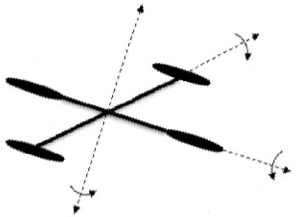
- 공간의 선적분

$$\int_C G(x, y, z)\, dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta z_k$$

$$\int_C G(x, y, z)\, dz = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t)) h'(t)\, dt$$

$$\int_C G(x, y, z)\, ds = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$



예제 5 **3차원 공간의 선적분**

C가 원형 나선 $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$, $0 \le t \le 2\pi$일 때 $\int_C y\,dx+x\,dy+z\,dz$를 계산하라.

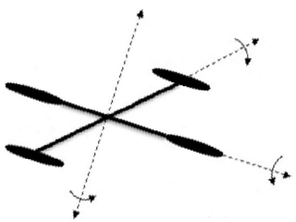
풀이 x, y, z를 t로 나타내면 $dx=-2\sin t\,dt$, $dy=2\cos t\,dt$, $dz=dt$이므로

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-4\sin^2 t + 4\cos^2 t)}_{\text{배각공식}}\,dt + t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt$$

$$= \left(2\sin 2t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

이다.



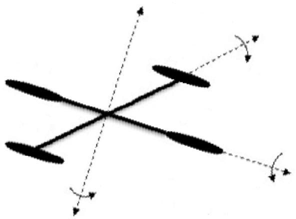
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

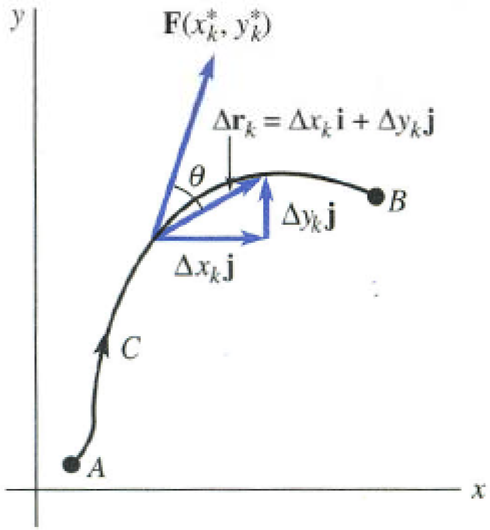
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j}$$

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\boxed{\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$



- 일 (work)

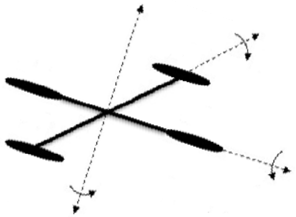


$$\Delta\mathbf{r}_k=(x_k-x_{k-1})\mathbf{i}+(y_k-y_{k-1})\mathbf{j}=\Delta x_k\mathbf{i}+\Delta y_k\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}(\|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\| \cos\theta)\|\Delta\mathbf{r}_k\| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\cdot\Delta\mathbf{r}_k \\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k\end{aligned}$$

C를 따라 F가 한 일은 선적분

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{또는} \quad W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

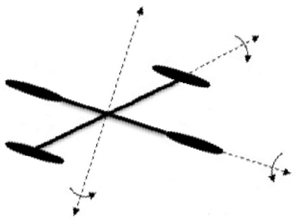


$\mathbf{T}=d\mathbf{r}/ds$ 가 C의 단위접선벡터일 때 $d\mathbf{r}=\mathbf{T}ds$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds=\int_C \mathrm{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\,ds$$

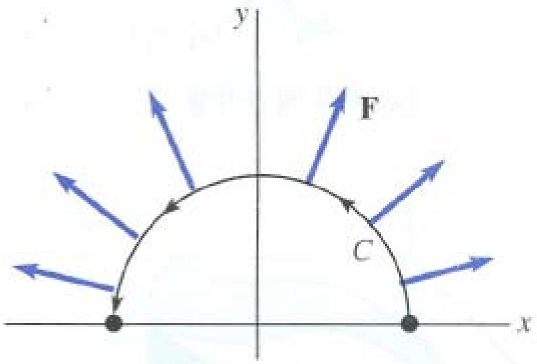
곡선 C를 따라 힘 $\mathbf{F}$가 한 일이 전적으로 힘 $\mathbf{F}$의 접선성분에 기인함



예제 6 힘이 한 일

$t=0$에서 $t=\pi$까지 $\mathbf{r}(t)=\cos t\ \mathbf{i}+\sin t\ \mathbf{j}$에 의하여 그려지는 곡선 C를 따라 (a) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$와 (b) $F=\frac{3}{4}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}$가 한 일을 구하라.

풀이 (a) 벡터함수 $\mathbf{r}(t)$는 매개방정식 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le \pi$를 나타내며, 이는 반원이다. 그림 9.52에 나와 있는 바와 같이 힘 $\mathbf{F}$는 모든 점에서 C에 수직이다. 즉 $\mathbf{F}$의 접선성분이 0이므로 C를 따라 한 일은 0이 되어야 한다. 실제로 (12)에서

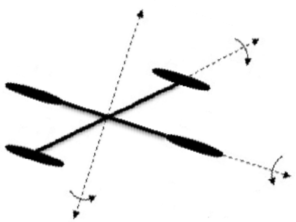


$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) \cdot (-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt$$

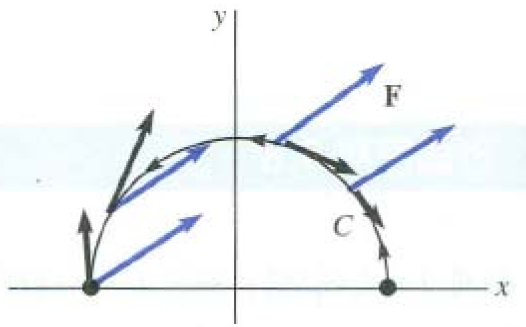
$$= \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)\, dt = 0$$

이 된다.



예제 6 힘이 한 일

$t=0$에서 $t=\pi$까지 $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$에 의하여 그려지는 곡선 C를 따라 (a) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$와 (b) $F=\frac{3}{4}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}$가 한 일을 구하라.



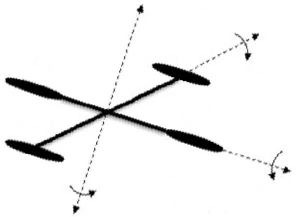
$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt$$

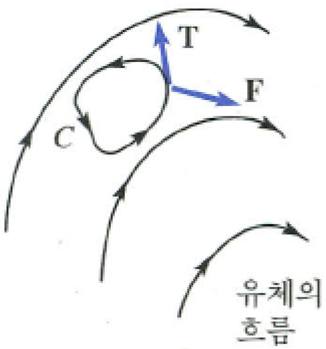
$$= \int_0^{\pi}\left(-\frac{3}{4}\sin t + \frac{1}{2}\cos t\right)dt$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)\Bigg]_0^{\pi} = -\frac{3}{2}$$

이다. 일의 단위는 $\|\mathbf{F}\|$의 단위와 거리의 단위에 의존한다.



■ **순환** 단순 폐곡선 C를 따라 벡터장 $\mathbf{F}$를 선적분한 것을 $\mathbf{F}$의 C에 대한 **순환**(circulation)이라고 한다. 즉



$$\text{순환} = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds$$

이다. 특히 $\mathbf{F}$가 유체의 속도장이면, 순환은 유체가 곡선 C를 회전시키는 정도를 나타내는 척도가 된다. 예를 들어 $\mathbf{F}$가 C의 모든 (x, y)에서 $\mathbf{T}$에 수직이면 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = 0$이 되어 곡선은 회전하지 않는다. 한편 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds > 0$과 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds < 0$은 각각 유체가 C를 반시계 방향과 시계 방향으로 회전시킨다는 것을 의미한다. 그림 9.54를 보라.