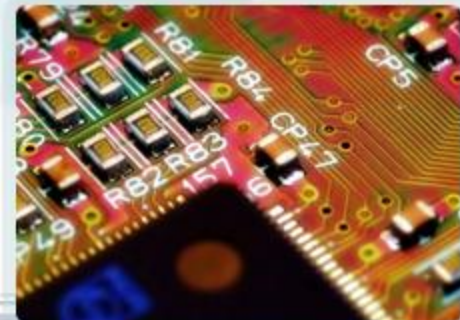


4강

# 부울함수의 간소화 및 구현 (1)

한국방송통신대학교  
컴퓨터과학과 김형근 교수





# 제 4 장 부울함수의 간소화 및 구현

## 강 의 내 용

1. 카노우 도표를 이용한 간소화

2. 2, 3, 4, 5, 6변수 카노우 도표





## 4.1 개요

### ❖ 부울함수의 간소화 방법

#### (1) 대수적인 방법

- 주어진 부울함수에 부울대수의 정리를 대수적으로 적용하여 간소화
- 도표방법과 테이블 방법의 이론적 바탕

#### (2) 도표 방법

- 카노우 도표(Karnaugh map)를 사용하는 방법
- 카노우 도표를 사용하면 부울함수의 각 항들은 곱 형태로 간소화
- 여섯 개 이하의 변수를 가진 부울함수에 사용

#### (3) 테이블 방법

- 퀸-맥클러스키(Quine-Mccluskey) 방법
- 테이블을 사용하여 간소화 알고리즘을 구현한 방법
- 많은 변수를 가진 부울함수에 적합





## 4.2 카노우 도표 방법

### ❖ 개요

- 카노우 도표는 여러 개의 사각형으로 된 다이어그램
- 사각형은 각각 하나의 **최소항** 또는 **최대항**을 나타낸다.
- 최소항 또는 최대항들이 차지하는 도표내의 면적을 이용하여 간소화
- 카노우 도표는 부울함수의 입력변수의 수에 따라 기본 도표의 형태가 결정된다.
- 입력변수의 수가  $n$  인 경우,  **$n$  변수 카노우 도표**라 하고,  $2^n$  개의 사각형으로 구성





## 4.2 카노우 도표 방법

### ❖ 개요

#### ➤ 카노우 도표를 이용하면

✓ 정규형 부울함수  $\Rightarrow$  표준형 부울함수로 간소화

✓ 즉, 1) 최소항의 합 형태가 **곱의 합** 형태나

2) 최대항의 곱 형태가 **합의 곱** 형태로 간소화 됨





## 4.2 카노우 도표 방법

### ❖ 개요

#### (1) 최소항의 합형을 곱의 합형으로 간소화하는 순서

- ① 입력변수의 수  $n$  에 따라  $n$  변수 카노우 도표 작성(도표는  $2^n$ 개의 정사각형)
- ② 최소항의 인덱스에 대응되는 사각형을 1로 표시
- ③ 1로 표시된 사각형들 중 서로 인접한 사각형끼리 묶음(이때 한 묶음은 크게, 전체 묶음의 수는 적게)
- ④ 각 묶음이 입력변수 각각에 대해 도표상의 어떤 위치에 있는지 파악(만일 해당 묶음이 입력변수  $X$  에 대해  $X=1$ 인 곳에만 존재하면 곱항에  $X$  를 남기고,  $X=0$ 인 곳에만 존재하면 곱항에서  $\overline{X}$  를 남긴다. 만일 묶음이  $X=0$ 인 곳과  $X=1$ 인 곳에 걸쳐서 존재한다면 곱항에서  $X$  변수를 소거한다)
- ⑤ ④에서 구한 각 묶음에 대한 곱항들을 논리합(OR)으로 연결시키면 간소화된 표준형(곱의 합형)이 구해진다.



## 4.2 카노우 도표 방법

### ❖ 개요

#### (2) 최대항의 곱형을 **합의 곱형**으로 간소화하는 순서

- ① 앞 (1)의 ①과 동일과정을 수행
- ② 최대항의 인덱스에 대응되는 사각형을 **0**으로 표시
- ③ **0**으로 표시된 사각형들 중 서로 인접한 사각형끼리 묶음(앞의 ③과 정과 동일)
- ④ 각 묶음이 입력변수 각각에 대해 도표상의 어떤 위치에 있는지 파악(만일 해당 묶음이 입력변수  $X$ 에 대해  $X=1$ 인 곳에만 존재하면 합항에  $\overline{X}$ 를 남기고,  $X=0$ 인 곳에만 존재하면 합항에서  $X$ 를 남긴다. 만일 묶음이  $X=0$ 인 곳과  $X=1$ 인 곳에 걸쳐서 존재한다면 합항에서  $X$  변수를 소거한다)
- ⑤ ④에서 구한 각 묶음에 대한 합항들을 **논리곱(AND)**으로 연결시키면 간소화된 표준형(**합의 곱형**)이 구해진다.

## 4.2 카노우 도표 방법

### (3) 인접 사각형의 정의

- 카노우 도표에서 각 정사각형은 하나의 최소항을 의미
- 따라서 **인접 사각형이란**
- “두 정사각형에 대응되는 각 최소항의 구성문자 중 다른 모든 문자는 동일하되 오직 하나의 문자만 서로 보수관계에 있을 때 두 정사각형은 서로 인접한다” 라고 정의

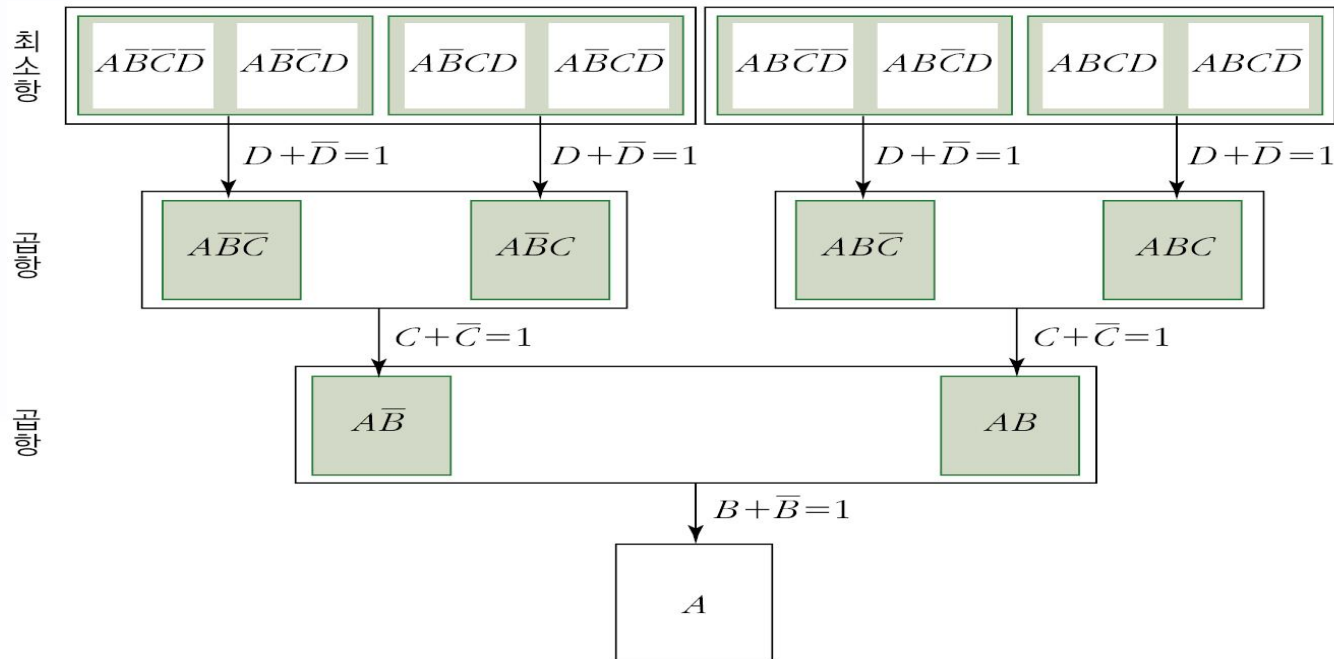
#### 예

- **입력변수가  $X, Y, Z$  3개의 경우**
- 최소항  $m_4 = X\bar{Y}\bar{Z}$  와  $m_6 = XY\bar{Z}$  는 카노우 도표에서 두 개의 정사각형을 의미한다.
- 이때 두 최소항을 더하면  $m_4 + m_6 = X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z}$  로 간소화된다(**공식**  $X + \bar{X} = 1$ )
- 이런 경우  $m_4$  와  $m_6$  로 대응되는 **두 개의 정사각형은 서로 인접한다**

## 4.2 카노우 도표 방법

### (4) 인접 사각형끼리 묶는 방법

- 첫째, 한 묶음 내의 정사각형의 수는  $2^n$  ( $n=0,1,2,\dots,n$ )개가 되도록 묶는다.
- 둘째, 한 묶음은 **크게**, 전체 묶음의 수는 **적게** 묶는다.



## 4.2.2 2변수 카노우 도표

❖ 두 개의 변수를 가지는 부울함수 → 네 개의 최소항

- 따라서 2변수 카노우 도표는 4개의 정사각형으로 구성되고
- 각각의 정사각형은 하나의 최소항에 대응

$x \backslash y$	0	1
0	$m_0$	$m_1$
1	$m_2$	$m_3$

$x \backslash y$	0	1
0	$\overline{X}\overline{Y}$	$\overline{X}Y$
1	$X\overline{Y}$	$XY$

## 4.2.2 2변수 카노우 도표

### ❖ 2변수 카노우 도표 간소화 예

X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X \ Y	0	1
0		
1		1

예1)

묶음 1 →  $XY$

$$F = XY$$

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X \ Y	0	1
0		1
1	1	1

예2)

묶음 1 →  $Y$

묶음 2 →  $X$

$$F = X + Y$$

## 4.2.3 3변수 카노우 도표

❖ 세 개의 변수를 가지는 부울함수 → 8 개의 최소항

- 따라서 3변수 카노우 도표는 8개의 정사각형으로 구성되고
- 각각의 정사각형은 하나의 최소항에 대응

X \ YZ				
	00	01	11	10
0	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
1	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

X \ YZ				
	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	$XYZ$	$XY\bar{Z}$

묵음 1 (01 column)  
묵음 2 (10 column)

## 4.2.3 3변수 카노우 도표

❖ 세 개의 변수를 가지는 부울함수 → 8 개의 최소항

➤ 잘못 작성된 3변수 카노우 도표

X \ YZ	00	01	10	11
0	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
1	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$

X \ YZ	00	01	10	11
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}Y\bar{Z}$	$\bar{X}YZ$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	$XY\bar{Z}$	$XYZ$

묵음 2 (간소화안됨) →

묵음1(간소화안됨) ↑

## 4.2.3 3변수 카노우 도표

예 1)  $F(X, Y, Z) = \sum m(0, 1, 2, 6)$  의 간소화

- 1) 3변수 기본 도표를 작성한다.
- 2) 주어진 부울함수에서 최소항을 해당 사각형에 1로 표기한다.
- 3) 묶는 규칙을 고려하여 인접 사각형끼리 묶는다.
- 4) 간소화된 각 항을 논리합(OR)으로 결합한다.

		YZ			
		00	01	11	10
X	0				
	1				

Red annotations: A bracket above the '11' column is labeled 'Y'. A bracket below the '01' and '11' columns is labeled 'Z'.

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	1	1		1
	1				1

Red annotations: A bracket above the '11' column is labeled 'Y'. A bracket below the '01' and '11' columns is labeled 'Z'. Dashed red arrows point from the '1's in the first row to  $\overline{X}\overline{Y}$  and from the '1's in the last column to  $Y\overline{Z}$ .

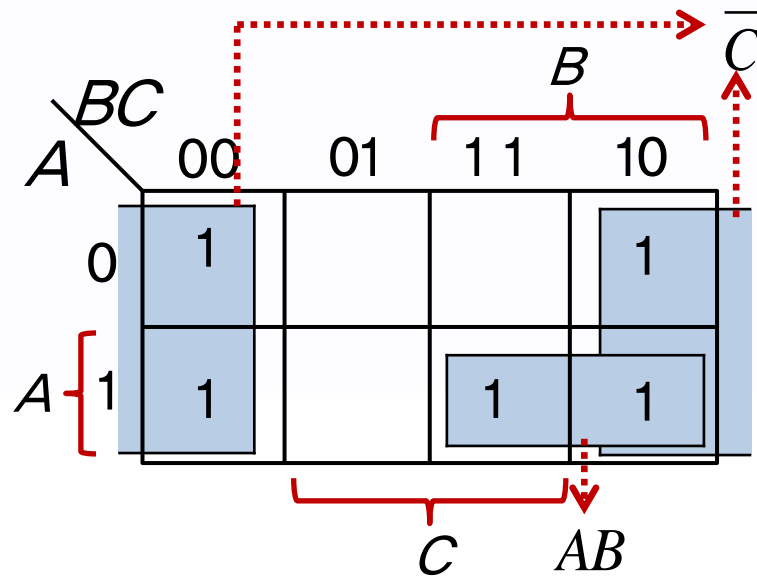
결국  $F(X, Y, Z) = \overline{X}\overline{Y} + Y\overline{Z}$

## 4.2.3 3변수 카노우 도표

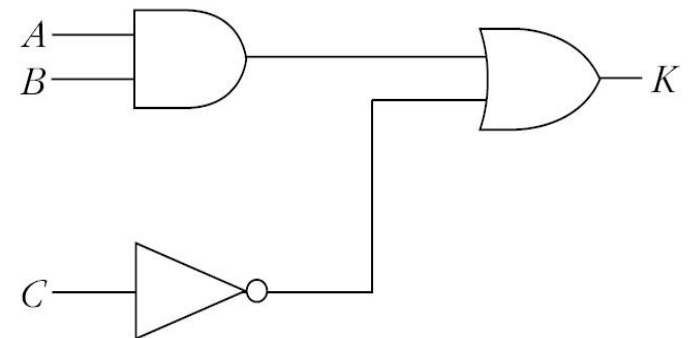
예 2) 다음 진리표를 만족하는 간소화된 논리회로도를 작성

입력	$A$	0	0	0	0	1	1	1	1
	$B$	0	0	1	1	0	0	1	1
	$C$	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	$K$	1	0	1	0	1	0	1	1

$$K(A, B, C) = \sum m(0, 2, 4, 6, 7)$$



결국  $K(A, B, C) = AB + \bar{C}$



작성된 논리회로도

## 4.2.4 4변수 카노우 도표

❖ 네 개의 변수를 가지는 부울함수 → 16 개의 최소항

- 따라서 4변수 카노우 도표는 16개의 정사각형으로 구성되고
- 각각의 정사각형은 하나의 최소항에 대응

$W \backslash YZ$	00	01	11	10
00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

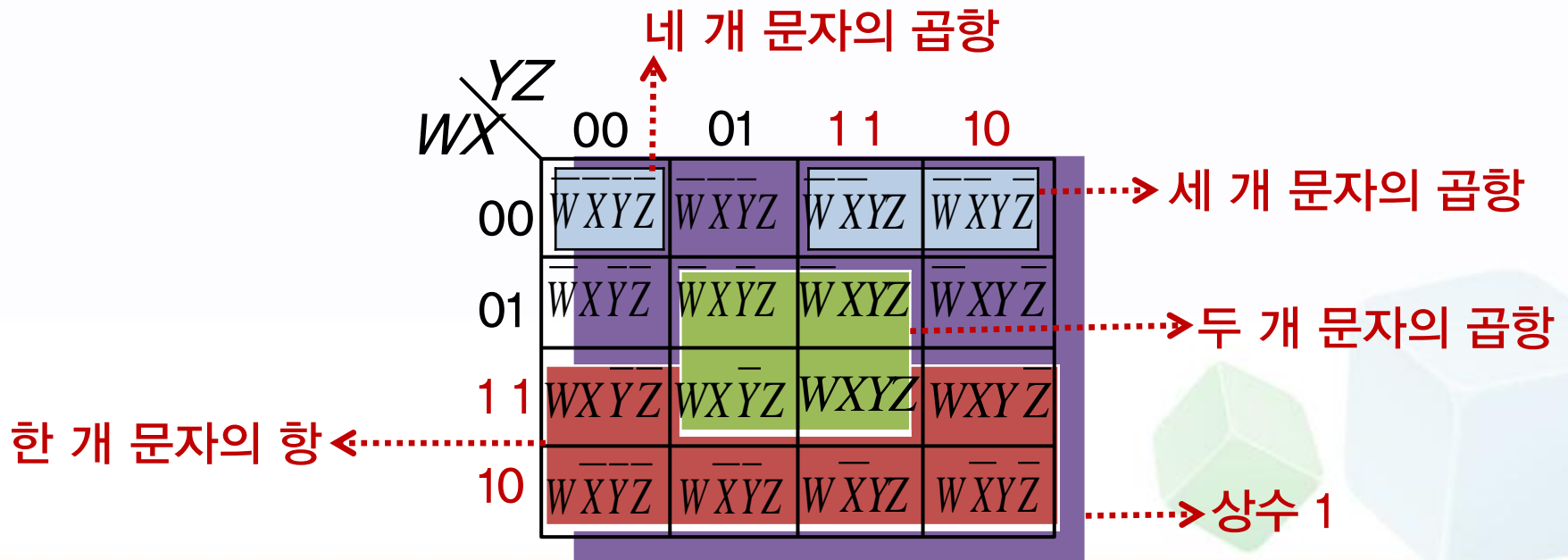
$W \backslash YZ$	00	01	11	10
00	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{W}\bar{X}YZ$	$\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$
01	$\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}X\bar{Y}Z$	$\bar{W}XYZ$	$\bar{W}XY\bar{Z}$
11	$WX\bar{Y}\bar{Z}$	$WX\bar{Y}Z$	$WXYZ$	$WXY\bar{Z}$
10	$W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$W\bar{X}\bar{Y}Z$	$W\bar{X}YZ$	$W\bar{X}Y\bar{Z}$

Red annotations in the original image:  
 - A bracket above the last two columns (11, 10) is labeled  $Y$ .  
 - A bracket to the right of the last two columns (11, 10) is labeled  $X$ .  
 - A bracket below the last two columns (11, 10) is labeled  $Z$ .  
 - A bracket to the left of the last two rows (11, 10) is labeled  $W$ .

## 4.2.4 4변수 카노우 도표

### ❖ 정사각형들의 묶음 → 곱항으로 간소화

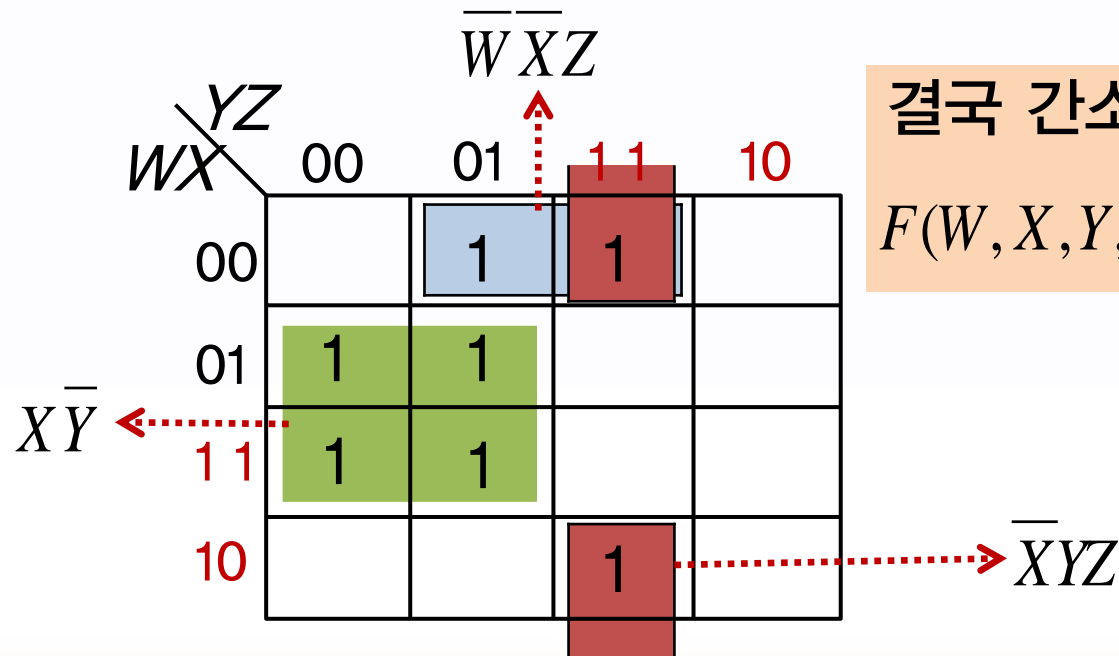
- 1) 하나의 정사각형 → 네 개 문자의 곱항으로 표시
- 2) 두 개의 인접 정사각형 → 세 개 문자의 곱항으로 표시
- 3) 네 개의 인접 정사각형 → 두 개 문자의 곱항으로 표시
- 4) 여덟 개의 인접 정사각형 → 한 개 문자의 곱항으로 표시
- 5) 열 여섯 개의 인접 정사각형 → 상수 1로 부울함수가 표시



## 4.2.4 4변수 카노우 도표

예1)  $F(W, X, Y, Z) = \sum m(1, 3, 4, 5, 11, 12, 13)$  를 간소화

- 1) 4변수 기본 도표를 작성한다.
- 2) 주어진 부울함수에서 최소항을 해당 사각형에 1로 표기한다.
- 3) 묶는 규칙을 고려하여 인접 사각형끼리 묶는다.
- 4) 간소화된 각 항을 논리합(OR)으로 결합한다.



결국 간소화된 부울함수는

$$F(W, X, Y, Z) = \overline{X} \overline{Y} + \overline{W} \overline{X} Z + \overline{X} Y Z$$

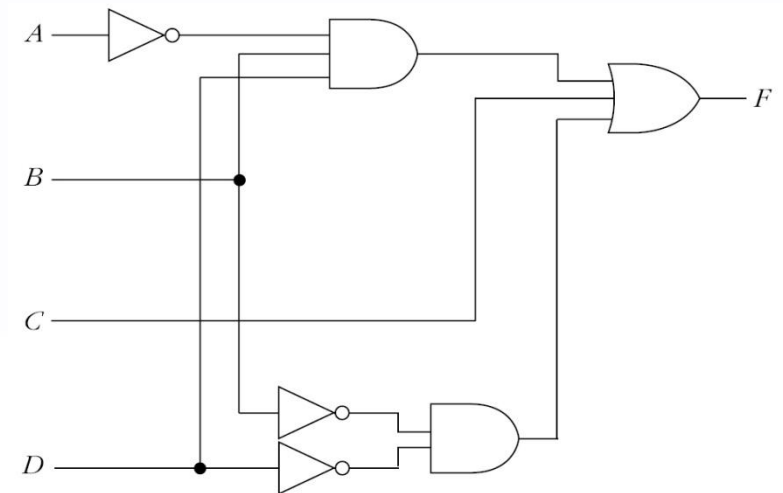
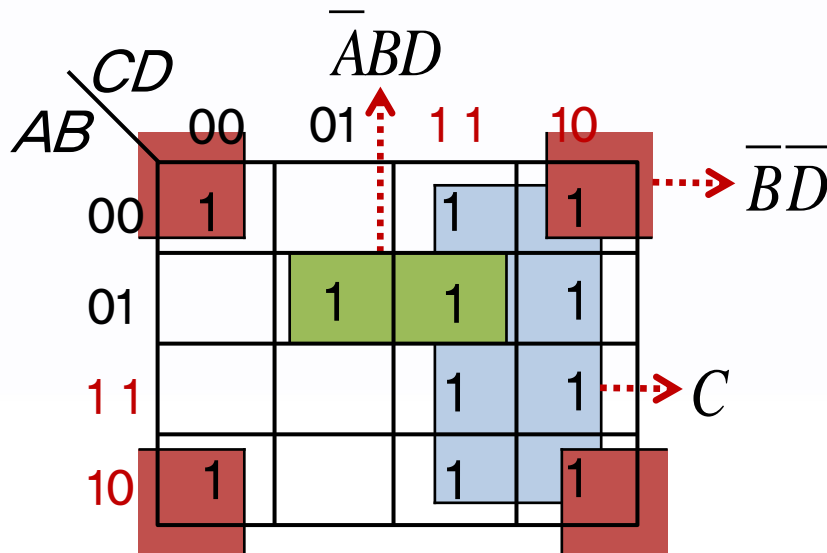
## 4.2.4 4변수 카노우 도표

### 예2) 진리표를 만족하는 간소화된 논리회로도 작성

A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

1) 진리표를 만족하는 간소화된 **부울함수 유도**

2) 유도된 부울함수를 이용하여 **논리회로도 작성**



결국 부울함수는  $F = C + \overline{B}\overline{D} + \overline{A}BD$

$F = C + \overline{B}\overline{D} + \overline{A}BD$  의 논리도



# 4강 내용 정리

## ❖ 부울함수의 간소화 및 구현

- ✓ 카노우 도표를 이용한 간소화
- ✓ 2, 3, 4 변수 카노우 도표를 이용한 부울함수의 간소화 방법



다음강의 예고

5강

# 부울함수의 간소화 및 구현 (2)

한국방송통신대학교  
컴퓨터과학과 김형근 교수

