3-1. 고계 선형미분방정식 (Higher Order Linear ODEs)

▶ 임의의 n계 미분방정식 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 일 때

$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=r(x)$ ········ (1) => 선형

▶ $r(x)\equiv 0$ (고려되는 모든 x에 대해서 0)

$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ ·············· (2)

=> 제차(homogeneous), (항등적으로 ≠ 0 , 비제차)

▶ 중첩의 원리 / 선형성의 원리

제차 선형미분방정식 (2)에 대해 어떤 열린구간 I 에서 해의 합과 상수곱은 다시 구간 I 에서 식 (2)의 해가 된다.

▶ 일반해, 기저, 특수해

일반해의 형태 : $y(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$
기저 : $y_1,\cdots,y_n$
특수해 : n개의 상수 $c_1,\cdots,c_n$에 특정한 값을 부여하면, 구간 I에서 식 (2)의 특수해(particular solution)를 얻는다.

▶ 1차 독립

$k_1y_1(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0,$ n개의 함수 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$에 대해 이들 함수가 정의된 어떤 구간 I에서 방정식이 모든 $k_1,\cdots,k_n$이 0이 됨을 의미할 때

▶ 1차 종속

방정식이 구간 I에서 적어도 하나의 0이 아닌 $k_1,\cdots,k_n$에 대해서도 성립할 때

Ex 1. 일차종속
$y_1=x^2,\ y_2=5x,\ y_3=2x \quad\rightarrow\quad y_2=0\,y_1+2.5y_3$

Ex 2. 일차독립

$y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3, \quad -1 \le x \le 2$

$k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

Ex 3. 일반해, 기저

$y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$

상계수: Put $y = e^{\lambda x}$ → 특성방정식: $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ → $(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0$ → $\lambda = \pm 2, \pm 1$

∴ 일반해, $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{2x}$

▶ 초기값 문제에 대한 존재성과 유일성의 정리

$p_0(x)$, $\cdots$, $p_{n-1}(x)$가 어떤 열린구간 에서 연속인 함수이고 x_0가 구간 I 내에 있다면, 초기값 문제 식은 구간 I 에서 유일한 해 $y(x)$를 갖는다.

Ex 4. 3계 Euler-Cauchy Equation의 초기값

$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \;\; y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -4$

E-C: Put $y = x^m$ → 보조방정식: $m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0$

→ $m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)(m-2)(m-3) = 0$ → $m = 1, 2, 3$

∴ 일반해, $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ → $y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$ → $y'' = 2c_2 + 6c_3 x$

초기값: $\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ y'(1) &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ y''(1) &= 2c_2 + 6c_3 = -4 \end{aligned}$ → $c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}} = \dfrac{(24+2-12)-(-8+6+12)}{(12+2+0)-(0+6+6)} = \dfrac{4}{2} = 2$

$c_2 = 1, c_3 = -1$ → ∴특수해: $y = 2x + x^2 - x^3$

▶ 일차독립의 해, Wronskian

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{cases} = 0 : \text{일차종속} \\ \neq 0 : \text{일차독립} \end{cases}$$

Ex 3. $W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} & e^x & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \\ 4e^{-2x} & e^{-x} & e^x & 4e^{2x} \\ -8e^{-2x} & -e^{-x} & e^x & 8e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} e^0 = 72$

▶ 일반해의 존재성

$p_0(x)$, $\cdots$, $p_{n-1}(x)$가 어떤 열린구간 I에서 연속이라면, 구간 I에서 일반해를 갖는다.

▶ 일반해가 모든 해를 포함한다.

식 (2)가 어떤 열린구간 I에서 연속인 계수 $p_0(x)$, $\cdots$, $p_{n-1}(x)$를 갖는다고 가정하자. 그러면 구간 I에서 식 (2)의 임의의 해 $y = Y(x)$는

=> $Y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ 의 형태이다.

여기서 $y_1, \cdots, y_n$은 구간 I에서 식 (2)의 해의 기저이고, $C_1, \cdots, C_n$은 적당한 상수이다.

Homework: Problem Set 3.1 : 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

3-2. 상계수를 갖는 고계 제차방정식

▶ 제차방정식

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

▶ $y = e^{\lambda x}$ 일 때

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \qquad \text{특성방정식}$$

▶ 특성방정식의 근을 결정하기

● 서로 다른 실근

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad \cdots \quad , \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

Ex 1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

상계수: Put $y = e^{\lambda x}$ → 특성방정식: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ → $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$ → $\lambda = -1, 1, 2$

∴ 일반해, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 2x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{(n-1)} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \cdots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

n개의 근이 모두 실수이고 서로 다를 때 n개의 해는 모두 x에 대해 기저를 형성

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \qquad \text{제차방정식의 일반해}$$

※ 제차방정식의 해 $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x}$ 가 자신의 해의 기저를 형성하는

필요충분조건 => 특성방정식의 n개의 근 모두가 서로 다른 것이어야 한다.

● 단순 복소근

▶ 제차 방정식의 계수가 실수

=> 공액쌍으로 나타난다.

$$y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x \;,\; y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x \qquad \text{두 개의 1차 독립인 해}$$

Ex 2. $y''' - y'' + 100y' - 100y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 11,\ y''(0) = -299$

상계수: Put $y = e^{\lambda x}$ → 특성방정식: $\lambda^3 - \lambda^2 + 100\lambda - 100 = 0$ → $(\lambda-1)(\lambda^2+100) = 0$ → $\lambda = 1, \pm 10i$

∴ 일반해, $y = c_1 e^{x} + c_2 \cos 10x + c_3 \sin 10x$

$$y' = c_1 e^{x} - 10c_2 \cos 10x + 10c_3 \sin 10x$$

$$y'' = c_1 e^{x} - 100c_2 \sin 10x - 100c_3 \cos 10x$$

초기값: $\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + 0 = 4 \\ y'(0) &= c_1 - 0 + 10c_3 = 11 \\ y''(0) &= c_1 - 100c_2 + 0 = -299 \end{aligned}$ → $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 1$

∴특수해: $y = e^{x} + 3\cos 10x + \sin 10x$

● 다중 실근

▶ 실이중근일 때

1차 독립인 해로써 y_1 과 xy_1

▶ 삼중근일 때

1차 독립인 해들은 $y_1, \quad xy_1, \quad x^2y_1$

▶ m 차근일 때

1차 독립인 해들은 $e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \quad x^2 e^{\lambda_1 x}, \cdots , \quad x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$

Ex 3. $y^v - 3y^{iv} + 3y''' - y'' = 0$

상계수: Put $y = e^{\lambda x}$

특성방정식: $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^3 = 0$

→ $\lambda = 0$(중근),1(삼중근)

∴ 일반해, $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^x$

● 다중 복소근

▶ 복소이중근일 때

1차 독립인 해 $e^{\gamma x}\cos\omega x$, $e^{\gamma x}\sin\omega x$, $xe^{\gamma x}\cos\omega x$, $xe^{\gamma x}\sin\omega x$

Homework: Problem Set 3.2 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17

Problems: a) $x^3y''' - 3x^2y'' + (6 - x^2)xy' - (6 - x^2)y = 0$의 한 개의 근이 $y_1 = x$일 때 이 미분방정식을 풀어라.

3-3. 고계 비제차 방정식

● n개 비제차 선형 미분방정식

▶ $y^{(n)} = d^n y/dx^n$을 첫 번째 항으로 한 표준형

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

▶ 일반해는

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad (\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) \text{의 형태} \ )$$

※ 식 (1)이 구간 I 에서 연속인 계수와 연속인 $r(x)$를 갖는다면, 일반해는 존재하고 모든 해를 포함한다. 따라서 특이해를 갖지 않는다.

▶ 초기값 문제(x_0에서의 n개의 초기조건)

$$y(x_0) = K_0, \ y'(x_0) = K_1, \ \cdots, \ y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

● 특수해 $y_p(x)$ 결정

=> 미정계수법 (2.7 참조)

Ex 1. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = -47$

Step 1: 제차, y_h

상계수: Put $y = e^{\lambda x}$

특성방정식: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1(\text{삼중근})$

∴ 일반해, $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x}$

Step 2: 특수해, y_p

Let, $y_p = cx^3 e^{-x}$

$$y_p{}' = 3cx^2 e^{-x} - cx^3 e^{-x} = c(3x^2 - x^3)e^{-x}$$
$$y_p{}'' = 6cxe^{-x} - 3cx^2 e^{-x} - 3cx^2 e^{-x} + cx^3 e^{-x} = c(6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}$$
$$y_p{}''' = 6ce^{-x} - 6cxe^{-x} - 12cxe^{-x} + 6cx^2 e^{-x} + 3cx^2 e^{-x} - cx^3 e^{-x} = c(6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}$$

대입: $c(6 - 18x + 9x^2 - x^3) + 3c(6x - 6x^2 + x^3) + 3c(3x^2 - x^3) + cx^3 = 30 \ \rightarrow \ c = 5$

∴ 일반해: $y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x} + 5x^3 e^{-x}$

Step 3: 초기값

$y(0) = c_1 = 3$,

$y' = \{-3 + c_2 + (-c_2 + 2c_3)x + (15 - c_3)x^2 - 5x^3\}e^{-x}$, $y'(0) = -3 + c_2 = -3 \rightarrow c_2 = 0$

$y'' = \{3 + 2c_3 + (30 - 4c_3)x + (-30 + c_3)x^2 + x^3\}e^{-x}$, $y''(0) = 3 + 2c_3 = -47 \rightarrow c_3 = -25$

∴특수해: $y = (3 - 25x^2)e^{-x} + 5x^3 e^{-x}$

=> 매개변수 변환법 (2.10 참조)

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} r(x)\,dx \\ &= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)\,dx + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x)\,dx \end{aligned}$$

Ex 2. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x$

Step 1: 제차, y_h

E-C: Put $y = x^m$

보조방정식:

$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)(m-2)(m-3) = 0$

→ $m = 1,\ 2,\ 3$

∴ 일반해, $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

Step 2: 특수해, y_p

기저: $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3$

$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$, $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$, $W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3$, $W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$

표준형: $y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = x \ln x$ → $r(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned} \therefore\ y_p &= y_1 \int \frac{W_1}{W} r\,dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} r\,dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} r\,dx \\ &= x \int \frac{x^4}{2x^3} x \ln x\,dx + y_2 \int \frac{-2x^3}{2x^3} x \ln x\,dx + y_3 \int \frac{x^2}{2x^3} x \ln x\,dx \\ &= x \int \frac{x}{2} x \ln x\,dx - x^2 \int x \ln x\,dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x\,dx \\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{x^3}{2}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - x^2\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^3}{2}(x \ln x - x) \\ &= \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6}\right) \end{aligned}$$

∴ 일반해: $y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6}\right)$

Homework: Problem Set 3.3 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

Problems: a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^{-x} - x + 1$