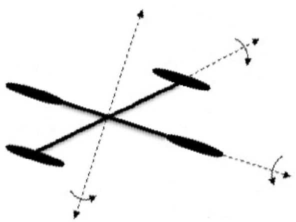
8장 Matrice -5

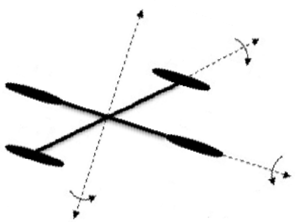


- 대각화

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ \text{1 열} \qquad\qquad\qquad \text{2 열} \end{array}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = (\underbrace{\mathbf{AX}_1}_{\text{1 열}} \quad \underbrace{\mathbf{AX}_2}_{\text{2 열}})$$



$P^{-1}AP=D$ 를 만족하는 **정칙행렬 P 가 있다면**
A는 대각화가능(diagonalizable)이라 한다.

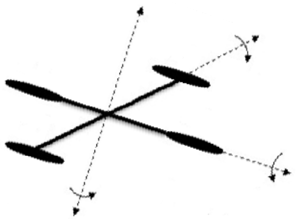
정리 8.30 대각화 가능성의 충분조건

$n \times n$ 행렬 **A**가 n개의 일차독립인 고유벡터 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$을 갖는다면, **A**는 대각화가 가능하다.

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1 \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2 \mathbf{K}_2, \quad \text{그리고} \quad \mathbf{AK}_3 = \lambda_3 \mathbf{K}_3 \qquad \mathbf{P} = (\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= (\mathbf{AK}_1\ \mathbf{AK}_2\ \mathbf{AK}_3) = (\lambda_1 \mathbf{K}_1\ \lambda_2 \mathbf{K}_2\ \lambda_3 \mathbf{K}_3) \\ &= (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{PD} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}}$$



정리 8.31 대각화 가능성에 대한 판정기준

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 대각화 가능하기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$가 n개의 일차독립인 고유벡터를 갖는 것이다.

정리 8.32 대각화 가능성에 대한 충분조건

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 n개의 서로 다른 고유값을 가지면, $\mathbf{A}$는 대각화가 가능하다.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$을 가능하다면 대각화

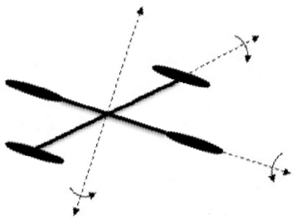
고유값은 $\lambda_1 = 1$과 $\lambda_2 = 4$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 그리고 $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$



행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = -4,\quad \lambda_3 = 3,\quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix},\quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

예제 3　대각화가 가능하지 않은 행렬

8.8절의 예제 3에서 행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$은 중복 고유값 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$를 가진다. 이에 상응하여, 단 하나의 고유벡터 $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$만을 구할 수 있다. 정리 8.31로부터 $\mathbf{A}$는 대각화 가능하지 않다는 결론이 나온다. □

행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

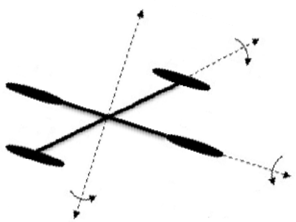
$\lambda_1 = -1$과 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$이다. $\lambda_1 = -1$ $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- 직교 대각행렬

정리 8.32 **직교 대각화 가능성에 대한 판정기준**

$n\times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 직교 대각화 가능하기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$가 대칭인 것이다.

부분 증명 정리의 필요부분을 증명하자. $n\times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 직교적으로 대각화 가능하다고 가정하자. 그러면 직교행렬 $\mathbf{P}$가 존재하여 $\mathbf{PAP}=\mathbf{D}$ 또는 $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$가 된다. $\mathbf{P}$가 직교하므로, $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T$이고 결론적으로 $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^T$이다. 그러나 정리 8.2의 ($i$), ($iii$)과 대각행렬은 대칭이라는 사실로부터

$$\mathbf{A}^T=(\mathbf{PDP}^T)^T=(\mathbf{P}^T)^T\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T=\mathbf{PDP}^T=\mathbf{A}$$

를 얻는다. 따라서 $\mathbf{A}$는 대칭이다. ❑

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 8, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

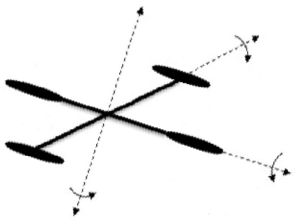
$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 그리고 } \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



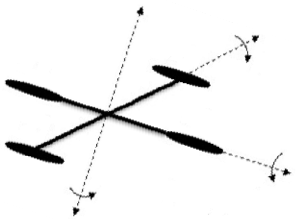
- 2차 형식 (Quadratic Form)

$$ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (x \;\; y)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

방정식이 $2x^2+4xy-y^2=1$ 인 원뿔곡선

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{또는} \quad \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -2, \;\; \lambda_2 = 3, \;\; \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{K}_1\| = \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{5}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ 그리고 } \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}' \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' = (\mathbf{X}')^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{D}\mathbf{X}'$$

$$(X \quad Y)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{또는} \quad -2X^2 + 3Y^2 = 1$$